Aula 13

Superposição
Conversão de fontes

Circuitos Elétricos I

Prof. Henrique Amorim - UNIFESP - ICT

Revisão

A mesma relação pode ser realizada se analisarmos apenas nos nós e ramos essenciais, uma vez que a corrente não é dividida em ramos e nós NÃO essenciais

$$be \rightarrow equações$$

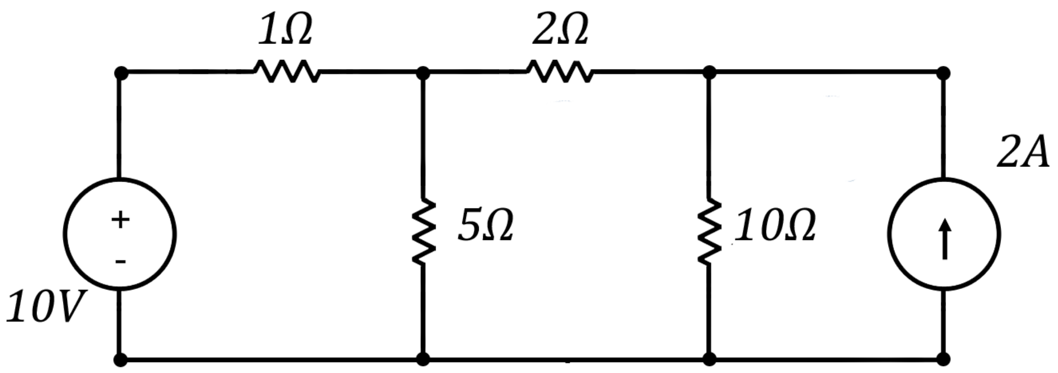
$$(ne - 1)$$
$$\boldsymbol{LKC}$$

TENSÃO DOS NÓS

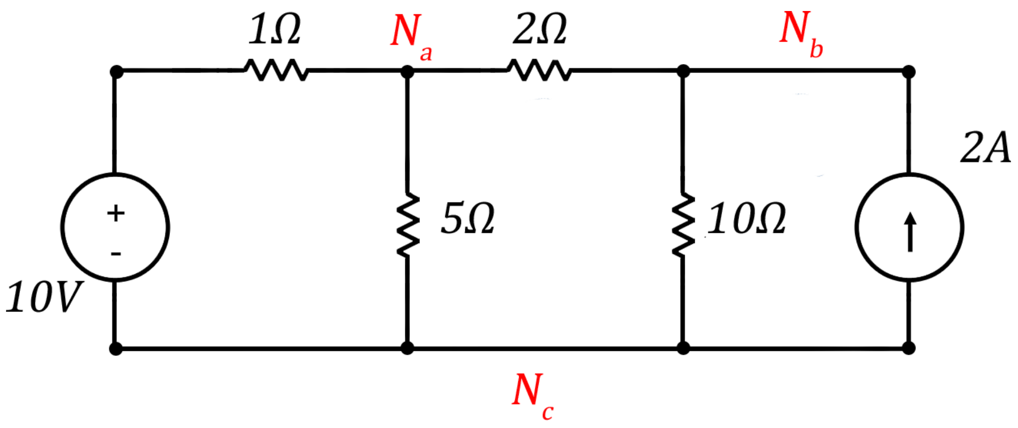
$$be - (ne - 1)$$
$$\boldsymbol{LKT}$$

CORRENTES DE MALHAS

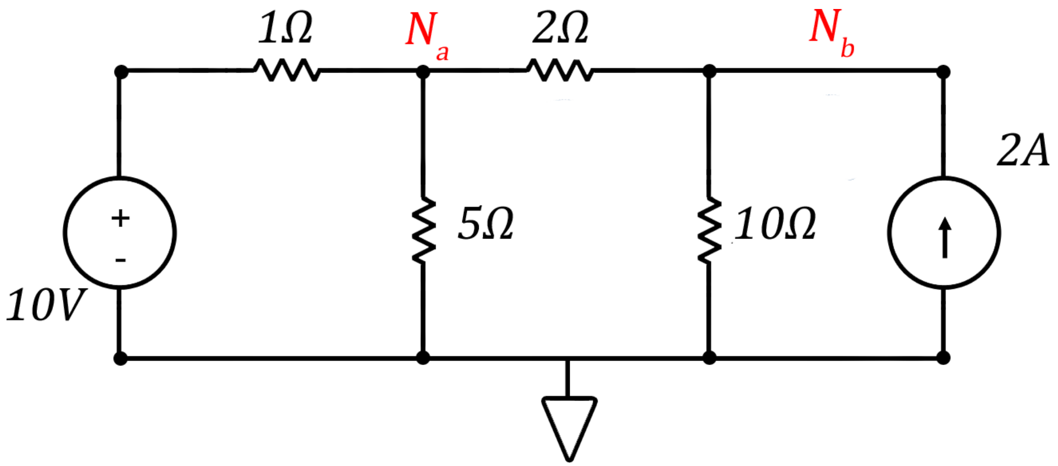
Revisão



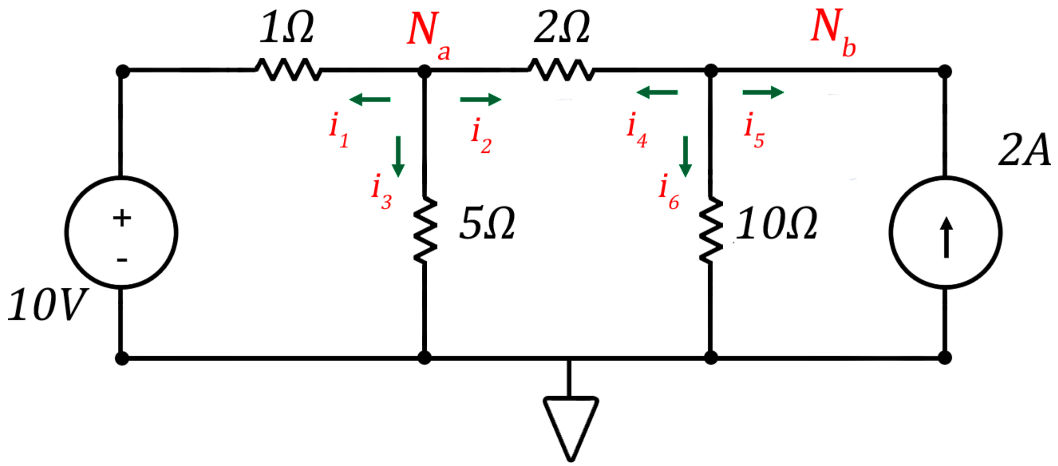
1Ω
2Ω
2A
10V
5Ω
10Ω



1Ω
N_a
2Ω
N_b
2A
10V
5Ω
10Ω
N_c

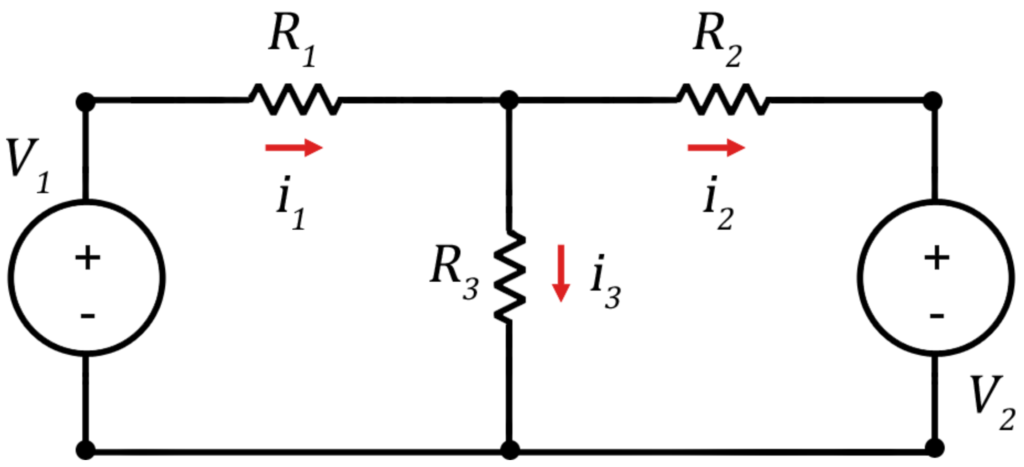


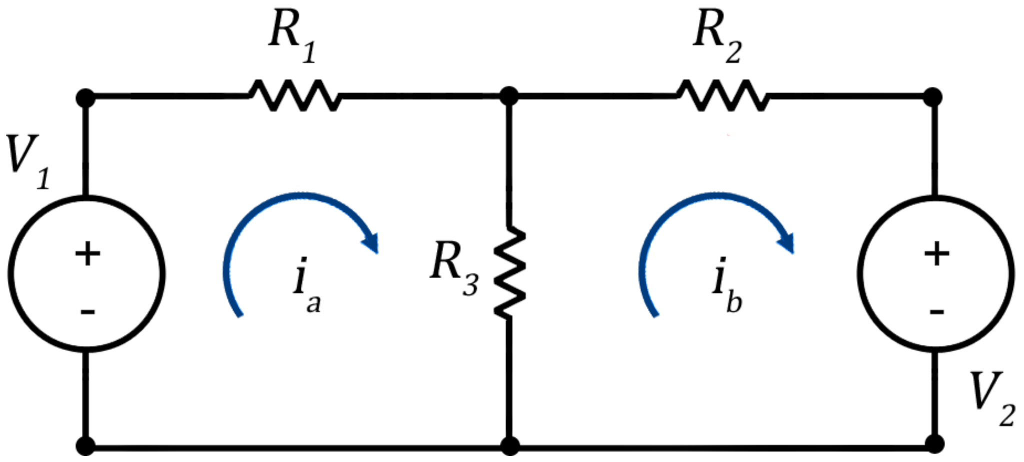
1Ω
N_a
2Ω
N_b
2A
10V
5Ω
10Ω



1Ω
N_a
2Ω
N_b
i_1
i_2
i_3
i_4
i_5
i_6
2A
10V
5Ω
10Ω

Revisão





$$\boldsymbol{Se}:\ \boldsymbol{i_3 = i_1 - i_2}$$

$$i_1 = i_a$$

$$i_2 = i_b$$

$$i_3 = i_a - i_b$$

Correntes das malhas

$$-V_1 + R_1 \boldsymbol{i_a} + R_3(\boldsymbol{i_a - i_b}) = 0$$

$$+R_3(\boldsymbol{i_b - i_a}) + R_2 \boldsymbol{i_b} + V_2 = 0$$

Super Nó x Super Malha

Método das tensões dos nós:

Super Nó: Quando entre dois nós essenciais existe **APENAS** uma fonte de tensão.

Método das correntes das malhas:

Super Malha: Quando uma fonte de corrente é compartilhada por duas malhas.

Superposição

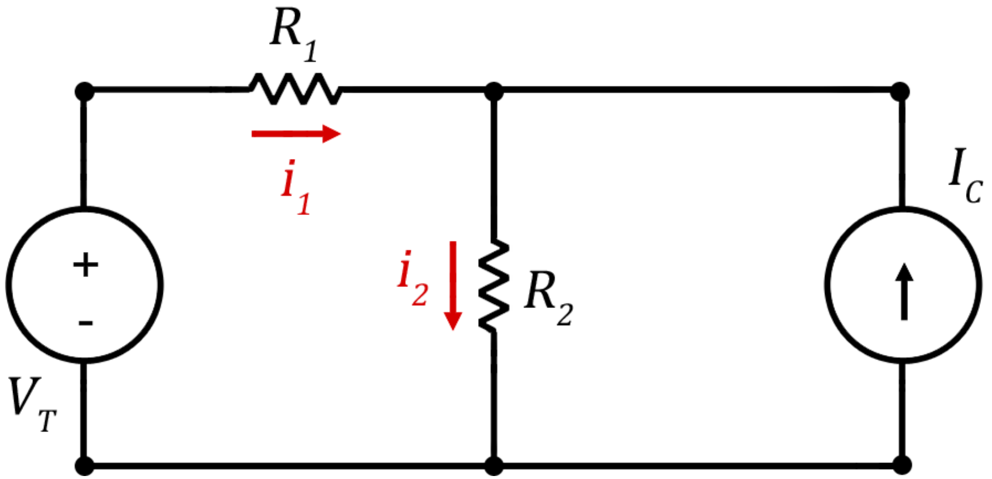
- O princípio da superposição afirma que a tesão ou corrente em um ramo, pode ser obtida pela análise isolada das fontes independentes.

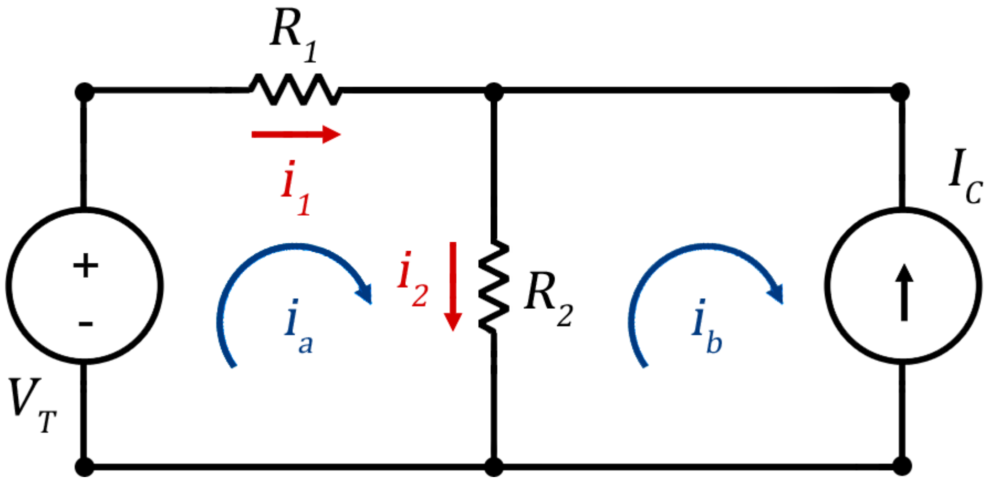
Etapa 1 – “Desligue” as fontes independentes exceto uma. Calcule as correntes e/ou tensão nos ramos de interesse;

Etapa 2 – Repita a Etapa 1 até que todas as fontes independentes tenham sido analisadas de forma isolada; e

Etapa 3 – Some as tensões e/ou correntes ramo a ramo.

Superposição – Dedução 1





Calcular as correntes i1 e i2 pelo método das correntes de malhas

$$i_b = -I_C$$

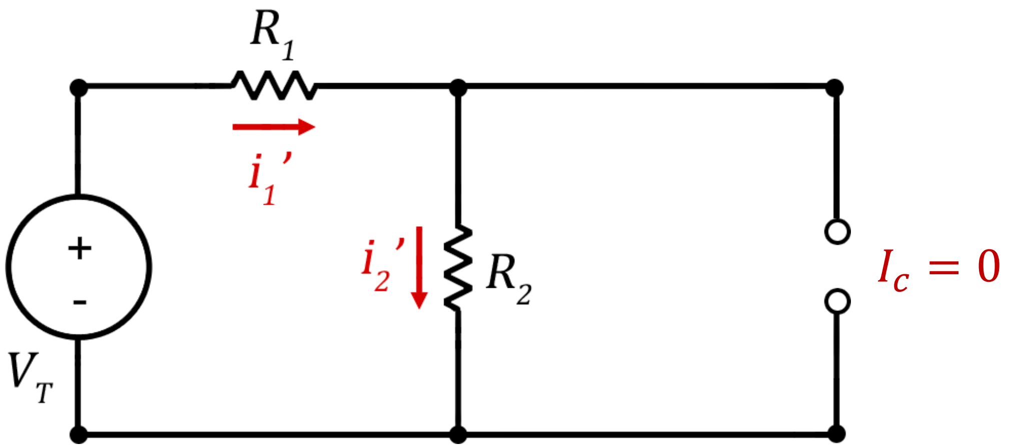
$$-V_T + R_1 i_a + R_2(i_a - i_b) = 0$$

$$-V_T + R_1 i_a + R_2(i_a + I_C) = 0$$

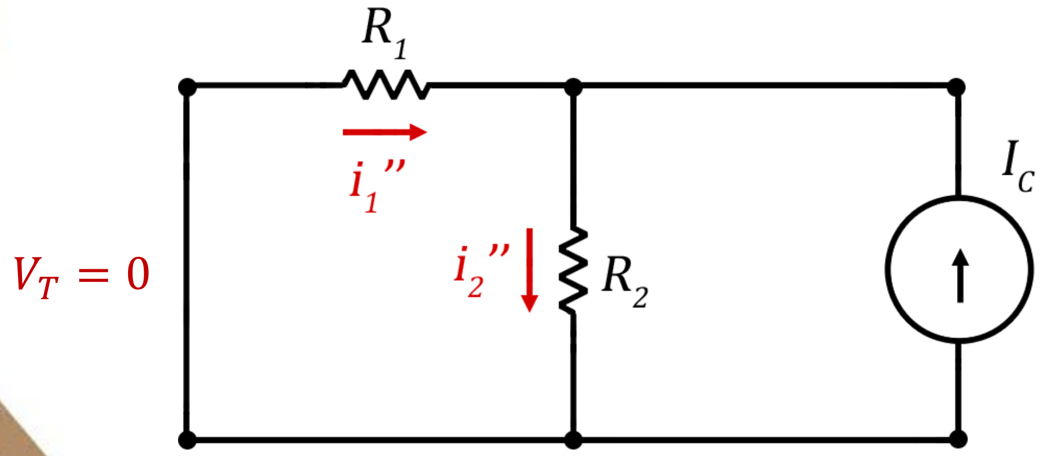
$$i_a = \frac{V_T - I_C R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\boldsymbol{i_1 = \frac{V_T - I_C R_2}{R_1 + R_2}} \qquad \boldsymbol{i_2 = \frac{V_T - I_C R_2}{R_1 + R_2} + I_C}$$

Superposição – Dedução 1



Fonte de corrente = 0 → Circuito aberto



Fonte de tensão = 0 → Curto circuito

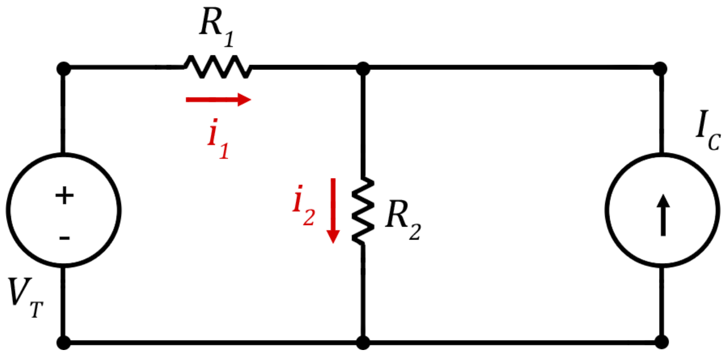
Associação de resistores

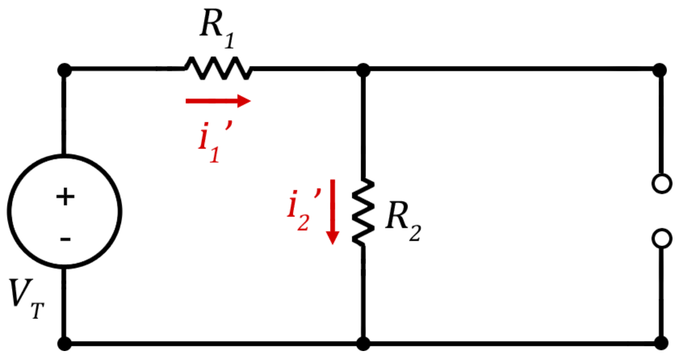
$$i_1' = i_2' = \frac{V_T}{R_1 + R_2}$$

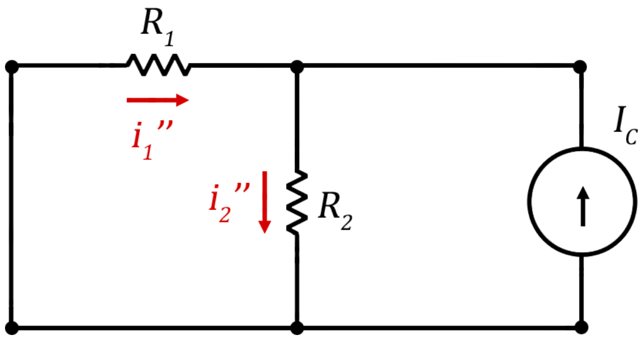
Divisor de corrente

$$i_1'' = -\frac{I_C \cdot R_2}{R_1 + R2} \qquad i_2'' = \frac{I_C \cdot R_1}{R_1 + R2}$$

Superposição – Dedução 1







$$i_1 = \frac{V_T - I_C R_2}{R_1 + R_2}$$

$$i_1' = i_2' = \frac{V_T}{R_1 + R_2}$$

$$i_1'' = -\frac{I_C \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$i_2 = \frac{V_T - I_C R_2}{R_1 + R_2} + I_C = \frac{V_T + I_C R_1}{R_1 + R_2}$$

$$i_2'' = \frac{I_C \cdot R_1}{R_1 + R_2}$$

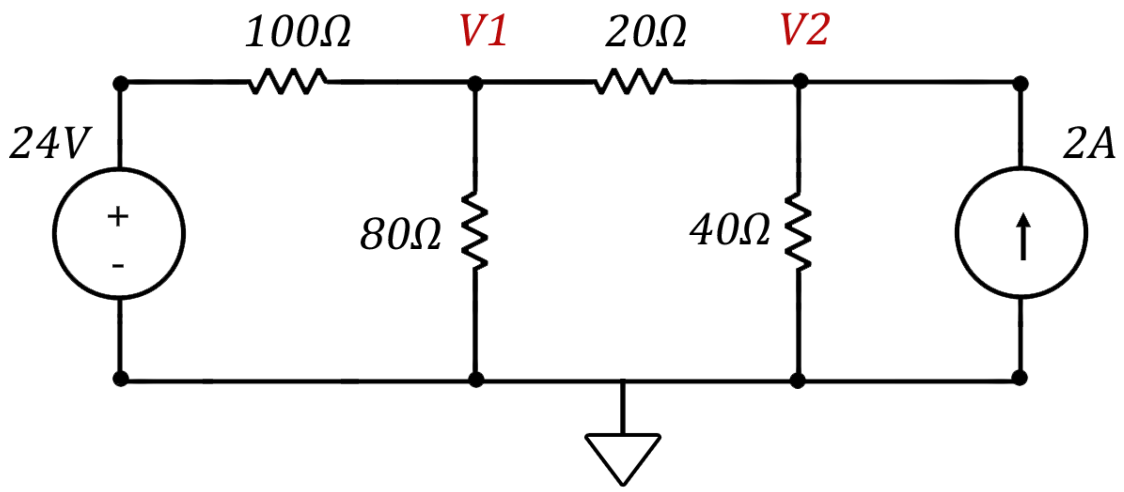
$$i_1 = i_1' + i_1''$$

$$i_1 = \frac{V_T}{R_1 + R_2} - \frac{I_C \cdot R_2}{R_1 + R2} = \boldsymbol{\frac{V_T - I_C R_2}{R_1 + R_2}}$$

$$i_2 = i_2' + i_2''$$

$$i_2 = \frac{V_T}{R_1 + R_2} + \frac{I_C \cdot R_1}{R_1 + R2} = \boldsymbol{\frac{V_T + I_C R_1}{R_1 + R_2}}$$

Superposição – Dedução 2



Equações das Tensões dos nós

$$\frac{V_1}{80} + \frac{V_1 - 24}{100} + \frac{V_1 - V_2}{20} = 0$$

$$\frac{V_2 - V_1}{20} + \frac{V_2}{40} - 2 = 0$$

$$V_1\left(\frac{1}{80} + \frac{1}{100} + \frac{1}{20}\right) + V_2\left(-\frac{1}{20}\right) = \frac{24}{100}$$

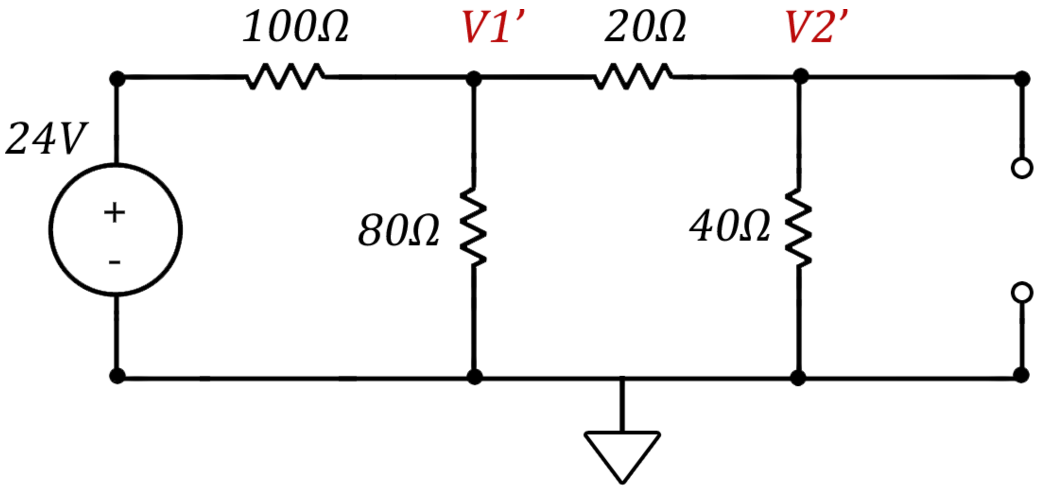
$$V_1\left(-\frac{1}{20}\right) + V_2\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{40}\right) = 2$$

$$\begin{cases} 0{,}0725 \cdot V_1 - 0{,}05 \cdot V_2 = 0{,}24 \\ -0{,}05 \cdot V_1 + 0{,}075 \cdot V_2 = 2 \end{cases}$$

$$(Ax = B)$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}0725 & -0{,}05 \\ -0{,}05 & 0{,}075 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}24 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Superposição – Dedução 2



Equações das Tensões dos nós

$$\frac{V_1{}'}{80} + \frac{V_1{}' - 24}{100} + \frac{V_1{}' - V_2{}'}{20} = 0$$

$$\frac{V_2{}' - V_1{}'}{20} + \frac{V_2{}'}{40} + 0 = 0$$

$$V_1{}'\left(\frac{1}{80} + \frac{1}{100} + \frac{1}{20}\right) + V_2{}'\left(-\frac{1}{20}\right) = \frac{24}{100}$$

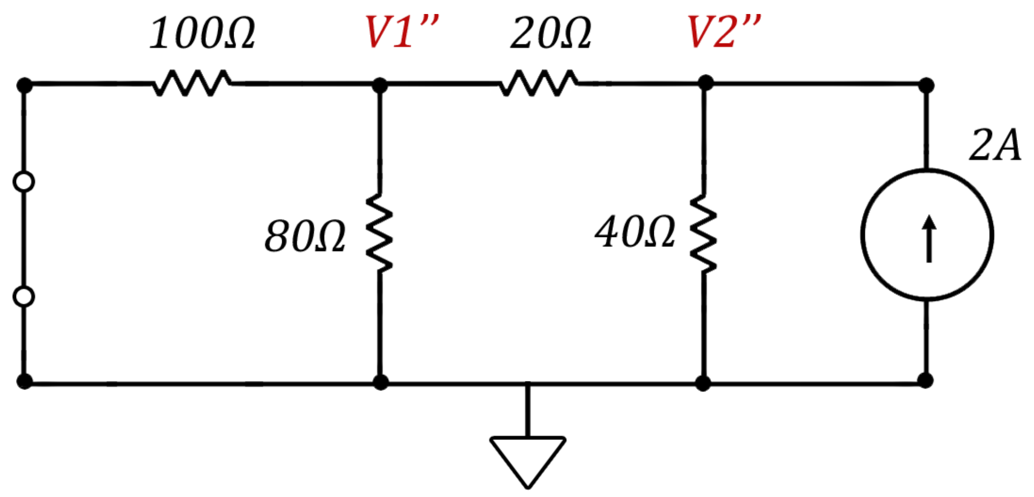
$$V_1{}'\left(-\frac{1}{20}\right) + V_2{}'\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{40}\right) = 0$$

$$\begin{cases} 0{,}0725 \cdot V_1{}' - 0{,}05 \cdot V_2{}' = 0{,}24 \\ -0{,}05 \cdot V_1{}' + 0{,}075 \cdot V_2{}' = 0 \end{cases}$$

$$(Ax' = B_1)$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}0725 & -0{,}05 \\ -0{,}05 & 0{,}075 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1{}' \\ V_2{}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}24 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Superposição – Dedução 2



$$V_1''\left(\frac{1}{80}+\frac{1}{100}+\frac{1}{20}\right)+V_2''\left(-\frac{1}{20}\right)=0$$

$$V_1''\left(-\frac{1}{20}\right)+V_2''\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{40}\right)=2$$

Equações das Tensões dos nós

$$\frac{V_1''}{80}+\frac{V_1''-0}{100}+\frac{V_1''-V_2''}{20}=0$$

$$\frac{V_2''-V_1''}{20}+\frac{V_2''}{40}-2=0$$

$$\begin{cases} 0{,}0725\cdot V_1''-0{,}05\cdot V_2''=0 \\ -0{,}05\cdot V_1''+0{,}075\cdot V_2''=2 \end{cases}$$

$$(Ax''=B_2)$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}0725 & -0{,}05 \\ -0{,}05 & 0{,}075 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} V_1'' \\ V_2'' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Superposição – Dedução 2

Sem superposição

$$Ax = B \rightarrow \begin{bmatrix} 0{,}0725 & -0{,}05 \\ -0{,}05 & 0{,}075 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}24 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x = A^{-1} \cdot B \qquad x' = A^{-1} \cdot B_1$$

$$x'' = A^{-1} \cdot B_2$$

$$x' + x'' = A^{-1} \cdot (B_1 + B_2)$$

"Desligando" a fonte de tensão

$$Ax' = B_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 0{,}0725 & -0{,}05 \\ -0{,}05 & 0{,}075 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$B_1 + B_2 = B \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}24 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}24 \\ 2 \end{bmatrix}$$

"Desligando" a fonte de corrente

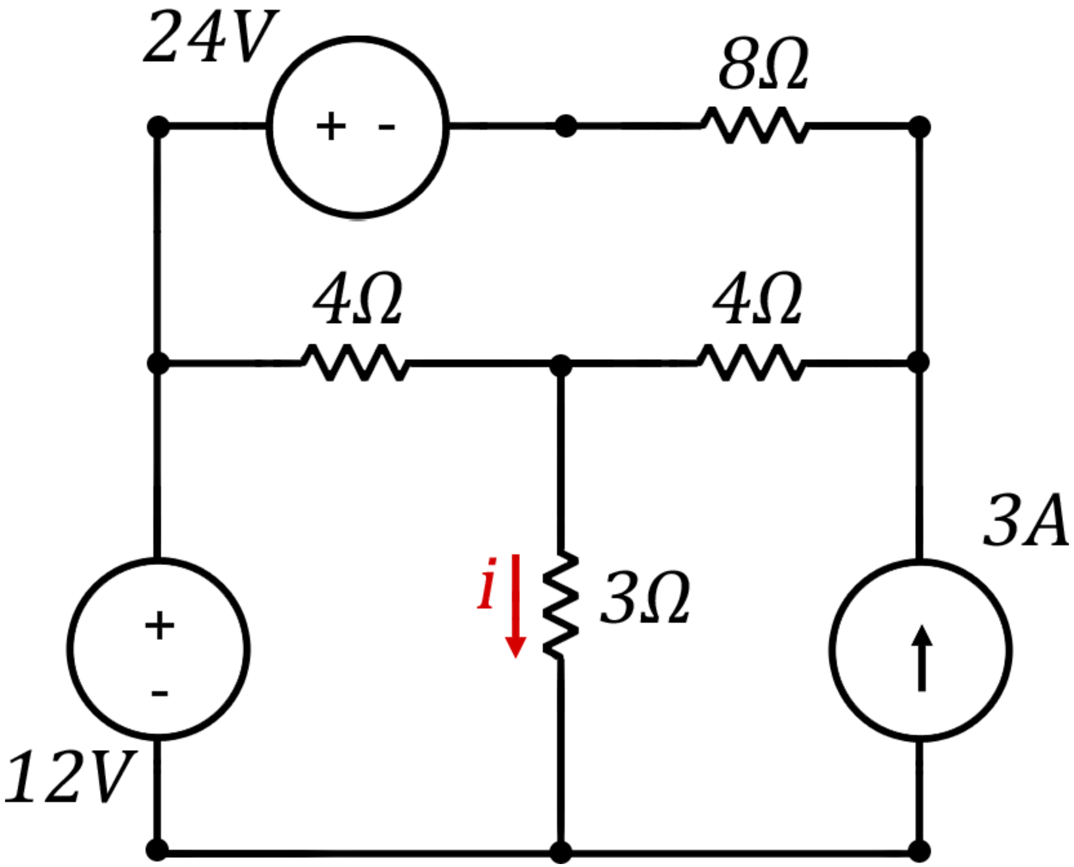
$$Ax'' = B_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 0{,}0725 & -0{,}05 \\ -0{,}05 & 0{,}075 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}24 \\ 0 \end{bmatrix}$$

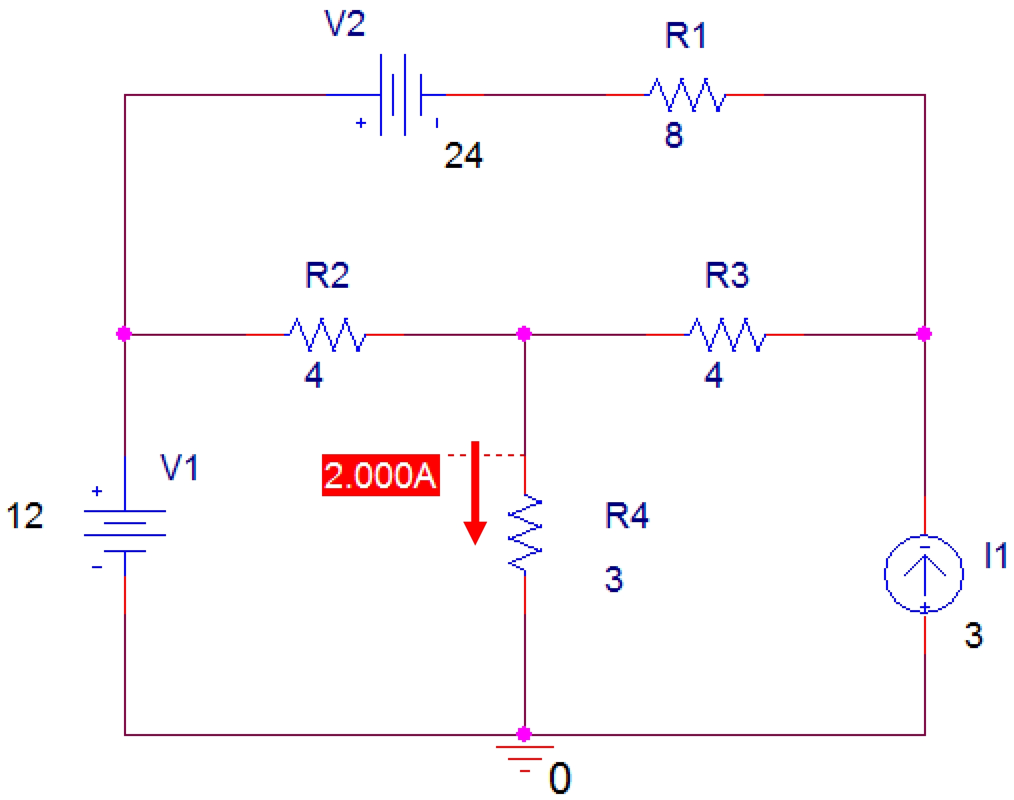
$$\boxed{x = x' + x''}$$

$A \rightarrow Termos\ dependentes\ (i.e.: resitores, fontes\ dependentes)$

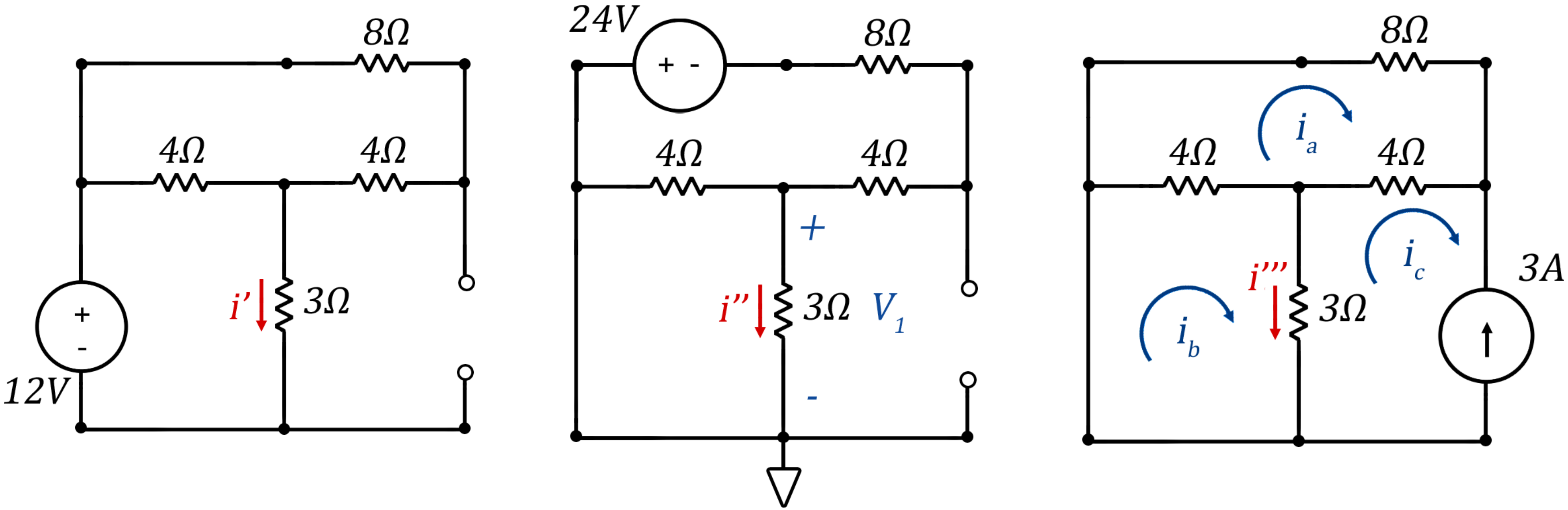
$x \rightarrow Tensões\ dos\ nós \qquad B \rightarrow Termos\ independentes\ (fontes\ independentes)$

Exercício: Um o teorema da superposição para calcular a corrente i

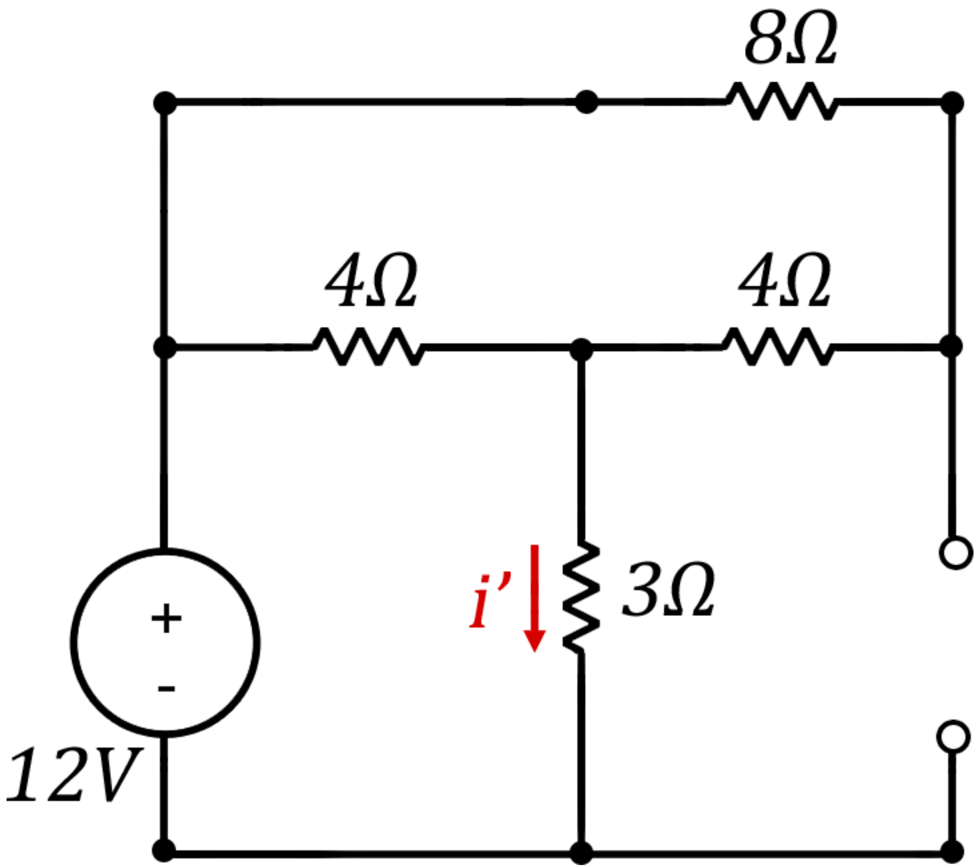


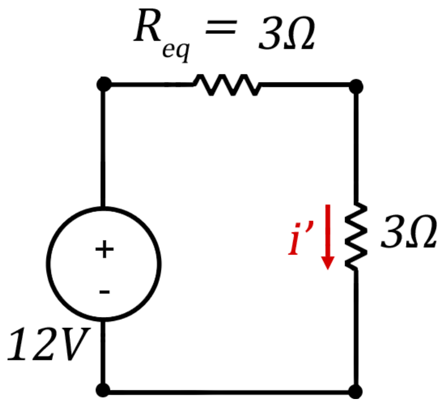


Exercício: Um o teorema da superposição para calcular a corrente i



Exercício: Um o teorema da superposição para calcular a corrente i





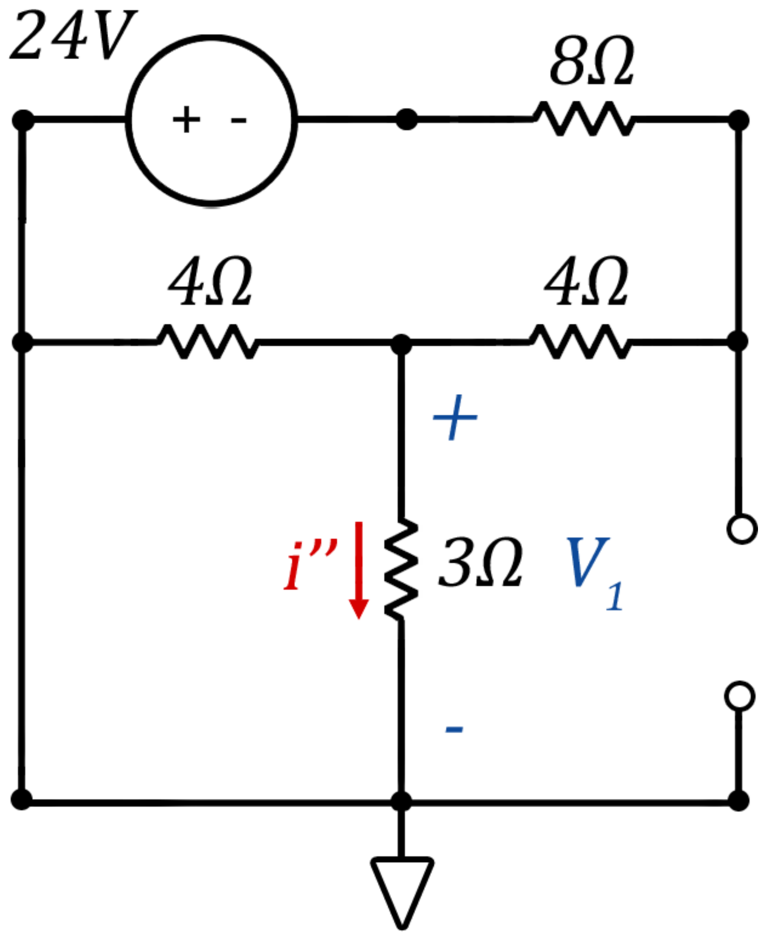
$$R_{eq} = (4+8)\,||\,4$$

$$R_{eq} = 3\Omega$$

$$\boldsymbol{i' = \frac{12}{3+3} = 2A}$$

Superposição

Exercício: Um o teorema da superposição para calcular a corrente i

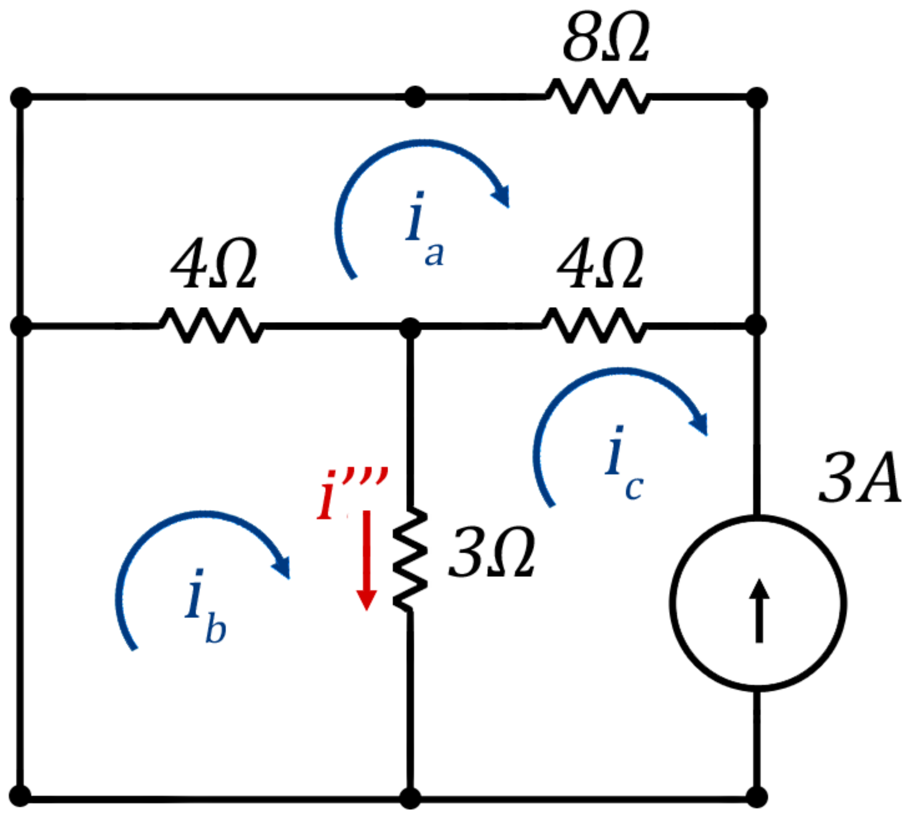


$$\frac{V_1}{3}+\frac{V_1}{4}+\frac{V_1+24}{12}=0$$

$$V_1\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right)=-2 \quad \therefore \quad V_1=-3A$$

$$\boldsymbol{i''=-\frac{3}{3}=-1A}$$

Exercício: Um o teorema da superposição para calcular a corrente i



$i_c = -3A$

$4(i_b - i_a) + 3(i_b - i_c) = 0$

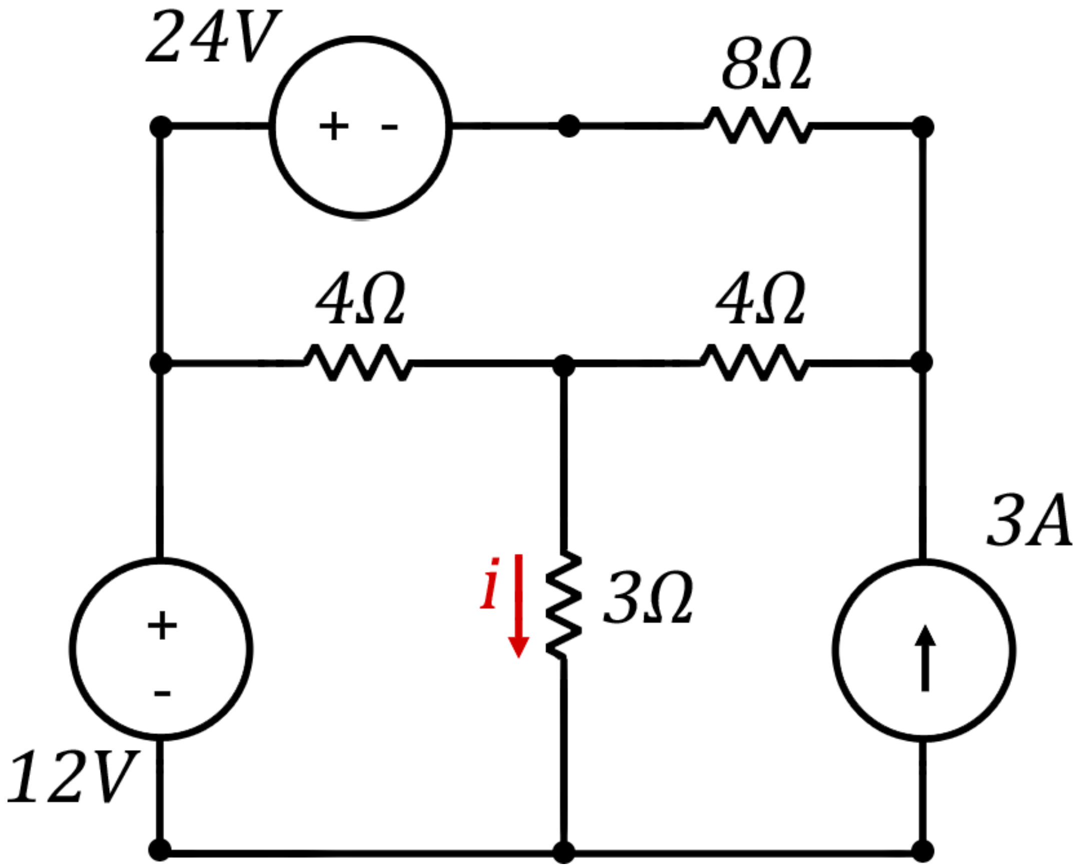
$4(i_a - i_b) + 8i_a + 4(i_a - i_c) = 0$

$i_b = -2A$

$\boldsymbol{i''' = i_b - i_c = -2 - (-3) = 1A}$

Superposição

Exercício: Um o teorema da superposição para calcular a corrente i



$$i' = 2A$$

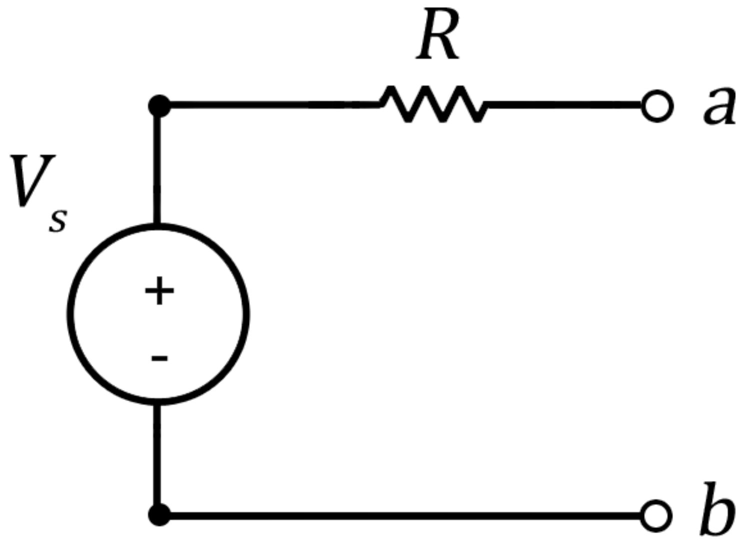
$$i'' = -1A$$

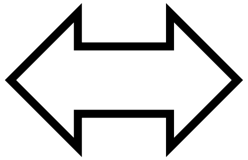
$$i''' = 1A$$

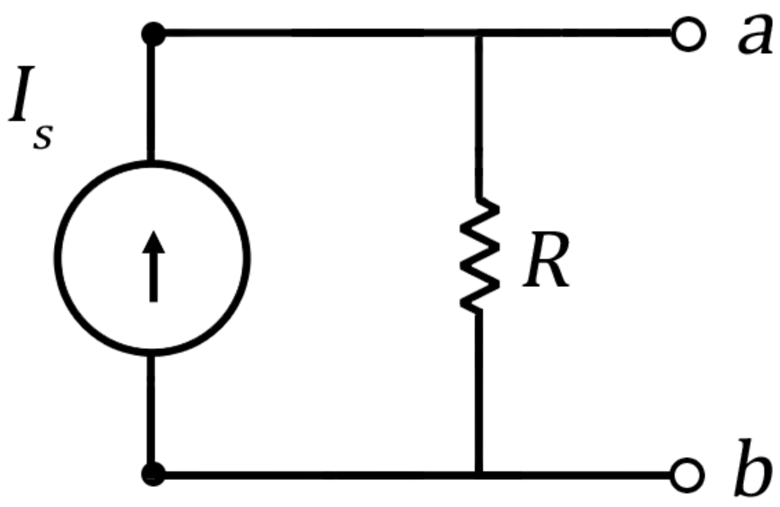
$$\boldsymbol{i = i' + i'' + i''' = 2A}$$

Equivalência entre fontes

Uma fonte de tensão, associada em série com um resistor R, pode ser substituída por uma fonte de corrente, associada em paralelo com um resistor R, desde que respeite os critérios de equivalência**.**

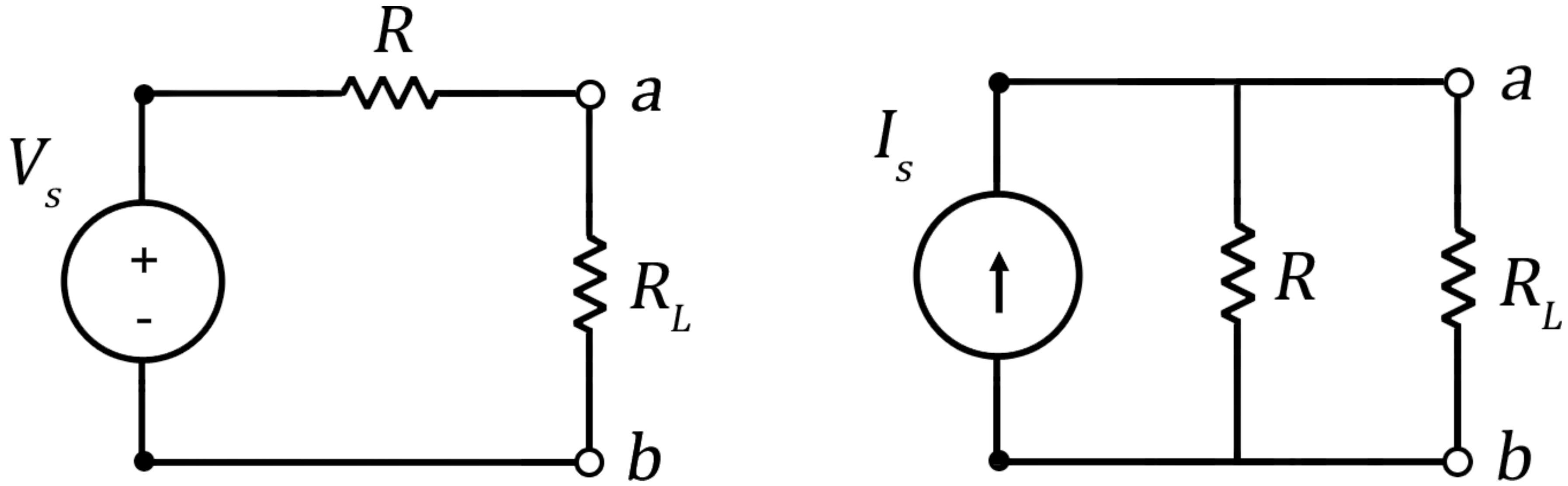




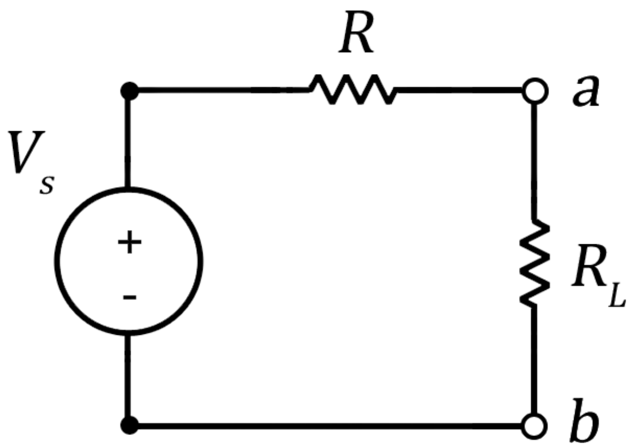


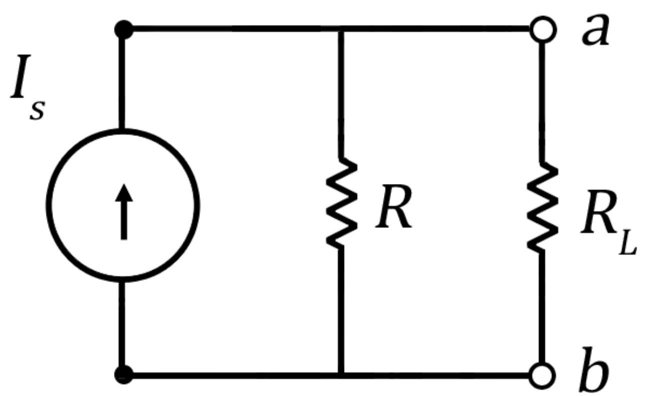
Equivalência entre fontes

Para estabelecermos a relação de equivalência entre fontes, vamos conectar uma resistência de carga (RL) aos terminais ab em ambas as configurações. Uma vez que a queda de tensão na carga, seja a mesma para ambas as configurações, podemos estabelecer a condição de equivalência.



Equivalência entre fontes





$$V_{R_L} = I_s \cdot (R\,||\,R_L)$$

$$V_{R_L} = I_s \cdot \left(\frac{R \cdot R_L}{R + R_L}\right)$$

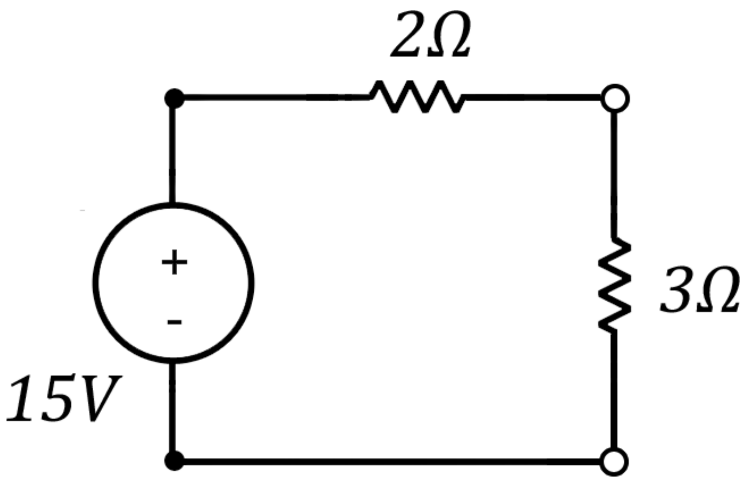
$$V_{R_L} = \frac{V_s \cdot R_L}{R_L + R}$$

$$I_s \cdot \left(\frac{R \cdot R_L}{R + R_L}\right) = \frac{V_s \cdot R_L}{R_L + R}$$

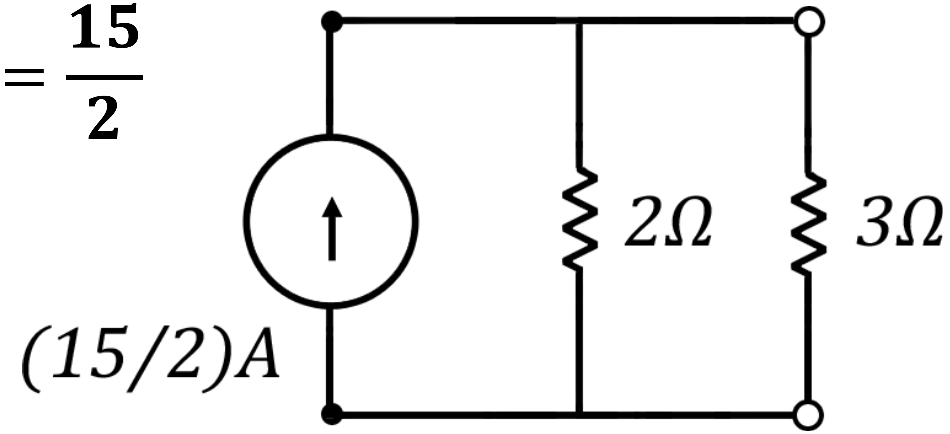
$$\boxed{\boldsymbol{V_s = R \cdot I_s \qquad ou \qquad I_s = \frac{V_s}{R}}}$$

Equivalência entre fontes

Exemplo: Prove que as configurações (fonte/resistor) abaixo são equivalentes.



$$\boldsymbol{I_s = \frac{V_S}{R} = \frac{15}{2}}$$



$$V_{3\Omega} = \frac{15 \cdot 3}{2+3} = 9V$$

$$i_{3\Omega} = \frac{9}{3} = 3A$$

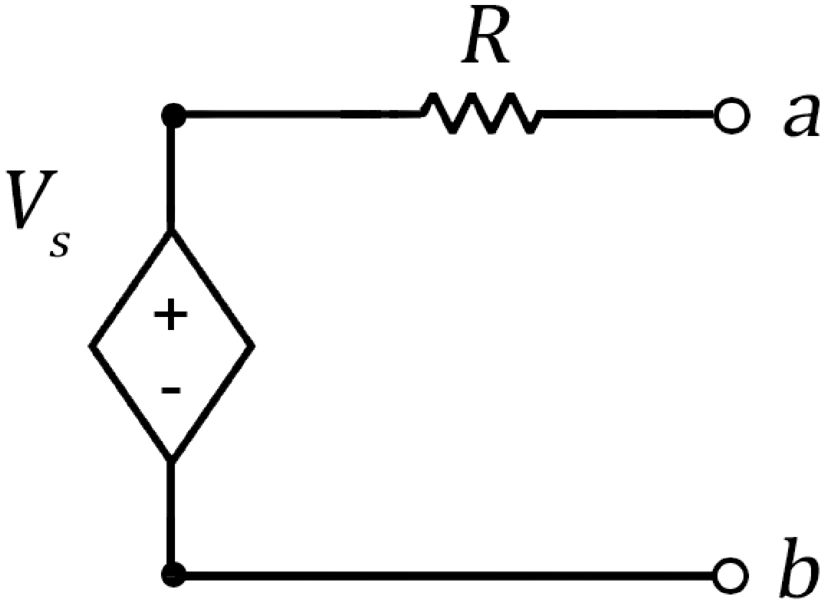
OK

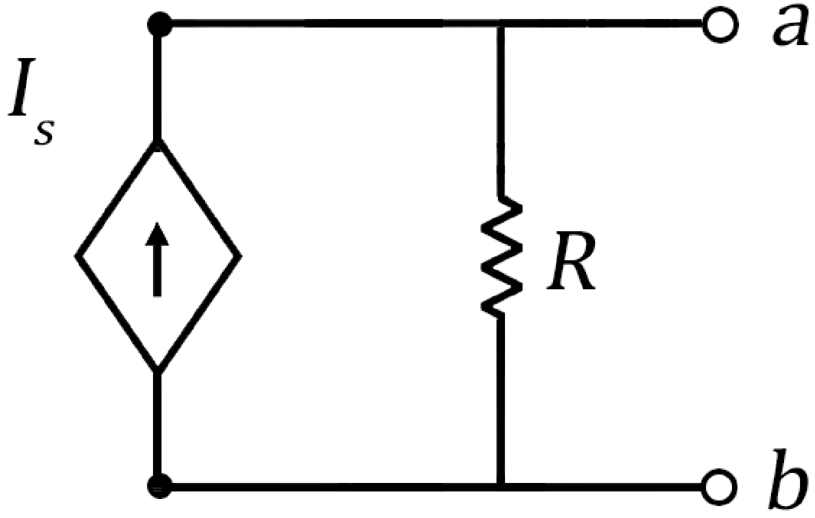
$$i_{3\Omega} = \frac{7{,}5 \cdot 2}{2+3} = 3A$$

$$V_{3\Omega} = 3 \cdot 3 = 9V$$

Equivalência entre fontes

A relação de equivalência também é valida para fontes dependentes

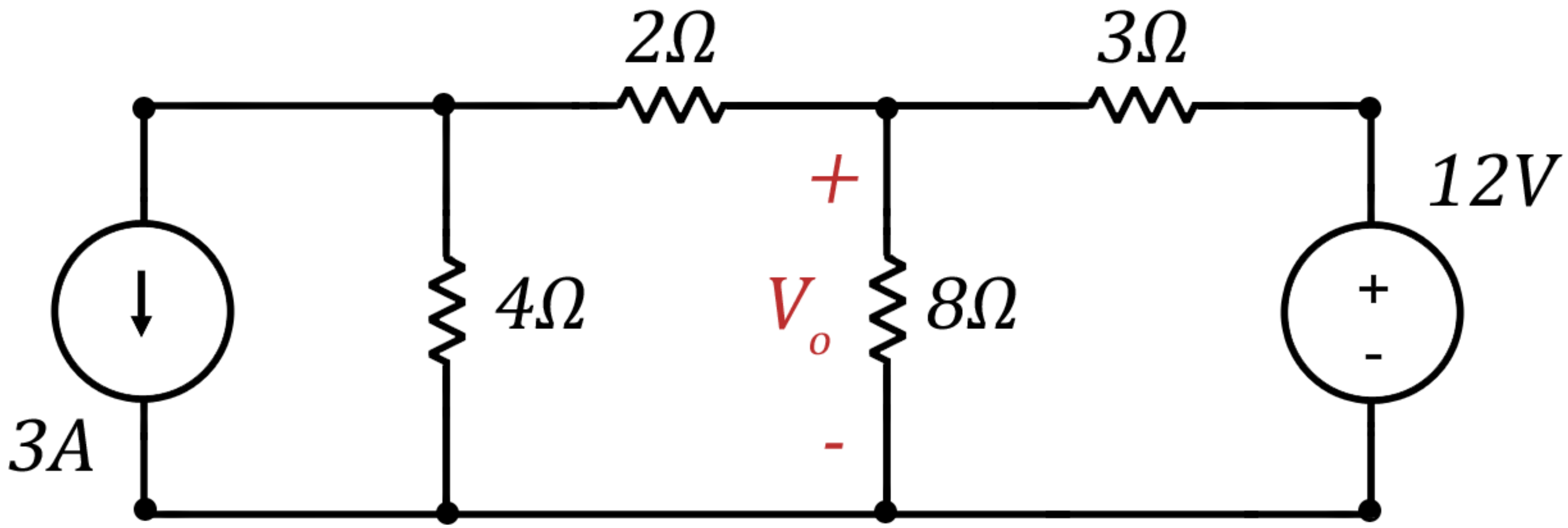




$$\boldsymbol{V_s = R \cdot I_s \qquad ou \qquad I_s = \frac{V_s}{R}}$$

Equivalência entre fontes

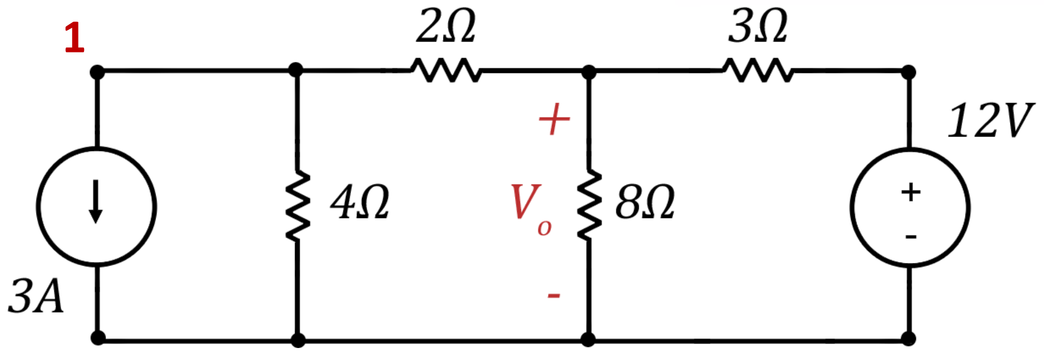
Exercício: Utilize a o conceito de equivalência entre fontes para simplificar o circuito e calcular Vo.



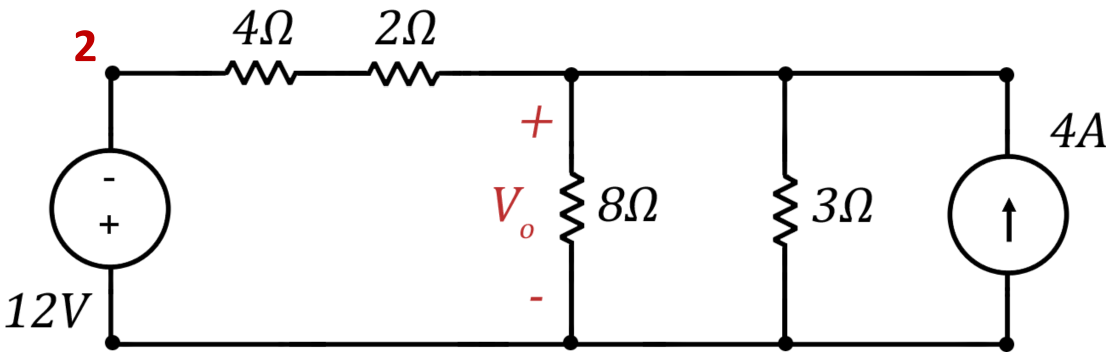
$$V_o = 3,2V$$

Equivalência entre fontes

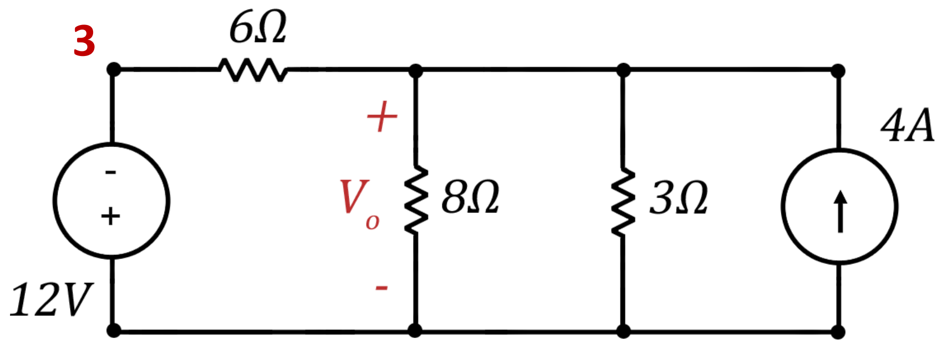
1



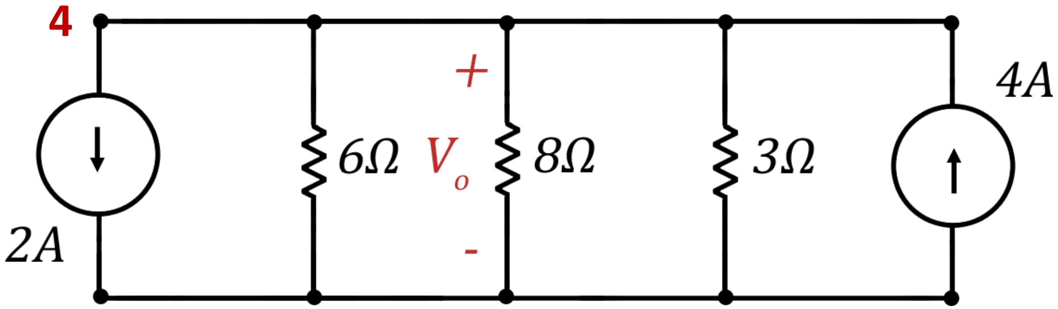
2



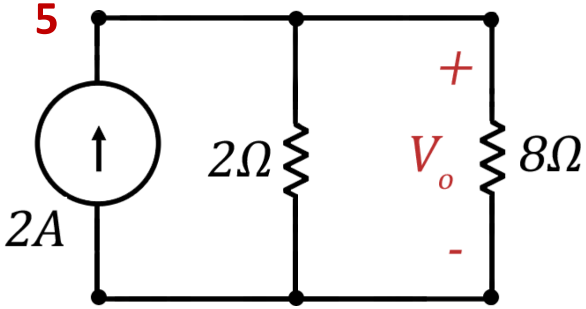
3



4



5



$$V_o = 2 \cdot \left(\frac{2 \cdot 8}{8+2}\right) = 3,2V$$